Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 21: 2012, Nr 3 (83), ISSN 1230–1493
DOI: 10.2478/v10271-012-0061-y

Logika

Kordula Świętorzecka

Ontologiczny dowód Gödla z ograniczoną redukcją modalności

> Zakres nazwy „logika" jest oczywiście sprawą konwencji, ale nazywanie logiką teorii prowadzącej do mocnych rozstrzygnięć egzystencjalnych nasuwa poważne wątpliwości. [Lepiej byłoby] powiedzieć, że dowód Lematu Leibniza [zgodnie z którym istnienie bytu najdoskonalszego nie jest niemożliwe] i dalsze kroki [argumentu ontologicznego] odbywają się w ramach pewnej teorii formalnej dotyczącej pojęć modalnych, a nie mają charakter czysto logiczny.
>
> J. Woleński, *Gaunilon dzisiaj*

Słowa kluczowe: *dowód ontologiczny, K. Gödel, dowód na istnienie Boga, teodycea, formalizacja*

Wybór rachunku o odpowiedniej mocy dedukcyjnej, na którym chcemy oprzeć jakąś teorię, oraz wskazanie jej aksjomatów specyficznych są uzależnione od tego, co jesteśmy gotowi uznać za specyfikę charakteryzowanych przez tę teorię pojęć w klasie dopuszczalnych jej interpretacji. Od takich rozstrzygnięć zależy także pragmatyczna wartość konstruowanej teorii – to one decydują o kwalifikacjach pragmatycznych aksjomatów, m.in. w związku z ich logicznym lub pozalogicznym statusem. Mimo że nie istnieją ogólne kryteria „odpowiednich" wyborów w tych sprawach, to w niektórych sytuacjach daje się ustalić przynajmniej jakieś „graniczne" przypadki, które trywializują analizowany problem lub uniemożliwiają jego rozwiązanie, a niekiedy zbędnie rozstrzygają kwestie z nim zasadniczo niezwiązane. Ich wskazywanie jest przy tym o tyle uzasadnione, że można w ten sposób istotnie zawęzić spektrum akceptowalnych formalizacji podnoszonego zagadnienia.

Prezentowane rozważania są efektem poszukiwania „odpowiedniej” i zarazem możliwie słabej podstawy formalnej ontologicznego argumentu na konieczne istnienie Boga, naszkicowanego przez K. Gödla.

Dotychczasowe modalne rekonstrukcje notatki Gödla z 1970 roku zatytułowanej *Ontologischer Beweis* odwołują się najczęściej do uzupełnienia D. Scotta i opierają argumentację Gödla na różnych kwantyfikatorowych rozszerzeniach logiki modalnej *S5* lub *B*. Bezsporne jest też, że zamierzoną przez samego autora charakterystyką modalności był właśnie system *S5.* Znaczenie funktorów modalnych w *S5* (i *B*) umożliwia określoną konstrukcję argumentu ontologicznego, jednak z drugiej strony może być uważane także za źródło słabości opartej na nim teorii Absolutu. Gdy taką teorię zechcemy wzbogacić i wziąć pod uwagę w szczególności możliwe egzystencjalne relacje między Absolutem a innymi (*przygodnymi*) indywiduami, modalności $\Box$ i $\Diamond$ wydają się nie podlegać redukcji charakterystycznej dla systemów *S5* i *B*[1].

Standardowe rozszerzenie *S5* lub *B* do logiki kwantyfikatorowej uwikłane jest w kolejne znane trudności. W odpowiednio rozbudowanej standardowej semantyce światów możliwych rozstrzyga się, że modele tych logik mają stałe uniwersum indywiduów, i to ograniczenie dziedziczą interpretacje opartych na nich teorii[2]. Tymczasem tego rodzaju rozstrzygnięcie nie ma związku z zasadniczym problemem rozważanym w formalizmie Gödla[3].

W poniżej zaproponowanej wersji argumentu Gödla ograniczymy redukcję modalności *S5* do wybranego specyficznego kontekstu dotyczącego istnienia Absolutu. Logiką, która pozwala zachować konstrukcję argumentacji Gödla, okaże się system *S4*. Otrzymaną teorię skojarzymy z semantyką światów możliwych z możliwie zmiennymi uniwersami. Istnienie indywiduów wyrazimy za pomocą kwantyfikatora $\exists$ zinterpretowanego aktualistycznie, bez użycia pierwotnego predykatu istnienia.

1. Argumentacja Gödla i jej prototyp – formalizm C. Hartshorne’a

Komentatorzy formalizacji Gödla są zgodni w kwestii filozoficznych odniesień naszkicowanego przez niego argumentu[4]. Jak powszechnie się uważa, główną

---

[1] Odnośnie tej redukcji można próbować na nowo podjąć krytykę w stylu Gaunilona – tym razem (dla *S5*) kwestionowalibyśmy to, że możliwość koniecznego istnienia dowolnego obiektu najdoskonalszego w jakiejś klasie („Najdoskonalszej Wyspy”) pociąga za sobą jego konieczne istnienie.

[2] Taką semantykę dla swoich wersji argumentu Gödla przyjmują np. J. Czermak (2002) i P. Hàjek (2002).

[3] Interpretacje M. Fittinga (2002) i S. Kovača (2003) dopuszczają zmienność uniwersum indywiduów.

[4] Szczegółowe ich omówienie można znaleźć np. w: Czermak 2002.

inspirację stanowił dla Gödla wykład Leibnizjańskiej filozofii Boga. Podobnie jak Leibniz, Gödel oparł swój dowód na pierwotnym pojęciu pozytywności (*positiveness*), które koresponduje z Leibnizjańskim *perfectio*, i przejął ideę Boga jako *subiectum omnium perfectionum*. Drugie podobieństwo do koncepcji Leibniza zasadza się na samej strukturze argumentacji, odnotowanej za pomocą współczesnej logiki modalnej już przed Gödlem przez C. Hartshorne-'a. Gödel znał próby Hartshorne'a; zachował też zasadniczą konstrukcję jego formalizmu, ale swoją argumentację istotnie rozbudował, uzasadniając odpowiedniki dwóch zasadniczych aksjomatów Hartshorne'a.

Formalizacja Hartshorne'a (1962) jest sformułowana w języku zdaniowym z klasycznymi funktorami prawdziwościowymi, operatorami modalnymi $\Box, \Diamond$, do którego dodano stałą zdaniową:

α^*=: *Byt najdoskonalszy istnieje*.

Za podstawę formalną przyjmuje się zdaniową logikę *S5*, która powstaje przez rozszerzenie klasycznej logiki zdaniowej o aksjomaty o następujących postaciach:

(K) $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(T) $\Box A \rightarrow A$

(5) $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

($\Diamond/\Box$) $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$

oraz regułę wprowadzania konieczności:

(Nec) $A = \Box A$.

Hartshorne używa w swojej formalizacji implikacji ścisłej ($\Rightarrow$), którą dalej będziemy eliminować na podstawie równoważności:

($\Rightarrow/\Box$) $(A \Rightarrow B) \leftrightarrow \Box (A \rightarrow B)$

Aksjomatami specyficznymi formalizacji Hartshorne'a są następujące dwa zdania:

(LA_H) $\alpha^* \Rightarrow \Box \alpha^*$

(*Lemat Anzelma: Jeżeli najdoskonalszy byt istnieje, to istnieje koniecznie*)

(LL_H) $\neg\Box\neg \alpha^*$

(*Lemat Leibniza: Istnienie bytu najdoskonalszego nie jest niemożliwe*)

Dowód głównej tezy o koniecznym istnieniu bytu najdoskonalszego, korespondujący z argumentacją Gödla, wygląda następująco:[5]

TH. $\Box\alpha^*$

---

[5] Omówienie oryginalnego dowodu Hartshorne'a i logik, na których można go oprzeć, prezentuje J. Perzanowski (1994a).

Dowód:

1. $\Diamond\alpha^*$ — $[LL_H, (\Diamond/\Box)]$
2. $\Box(\alpha^* \rightarrow \Box\,\alpha^*)$ — $[LA_H, (\Rightarrow/\Box)]$
3. $\Diamond\alpha^* \rightarrow \Diamond\Box\alpha^*$ — [2, K]
4. $\Diamond\Box\alpha^* \rightarrow \Box\alpha^*$ — [(5)]
5. $\Diamond\alpha^* \rightarrow \Box\alpha^*$ — [3, 4]
6. $\Box\alpha^*$ — [5, 1]

Uprzedzając systematyczną prezentację Gödlowskiego formalizmu, odnotujmy w nim odpowiedniki *Lematu Anzelma* i *Lematu Leibniza* (wyrażenie *Gx* czytamy: *x jest Bogiem*):

(*LA*) $\Box(\exists_x Gx \rightarrow \Box\exists_x Gx)$
(*Istnienie Boga pociąga za sobą Jego konieczne istnienie*)

(*LL*) $\Diamond\exists_x Gx$
(*Istnienie Boga jest możliwe*)

Podobieństwo argumentacji Gödla i Hartshorne'a w kluczowym fragmencie jest oczywiste. Wykorzystując aparat logiki zdaniowej *S5*, możemy uzyskać główną tezę argumentacji Gödla w taki sam sposób, jak *TH*:

TG. $\Box\exists_x Gx$
(*Konieczne jest to, że Bóg istnieje*)

Jak już powiedzieliśmy, formalizm Gödla jest pod wieloma względami bogatszy od teorii Hartshorne'a. Gödel uzasadnia lematy *LA* i *LL*, chcąc w ten sposób zrealizować znaną ideę Leibniza. Po pierwsze, stara się naprawić błąd w argumentacji Kartezjusza wielokrotnie wskazywany przez Leibniza, a polegający na braku uzasadnienia jednej z kluczowych przesłanek, zgodnie z którą idea Boga jako podmiotu wszystkich doskonałości jest możliwa[6]. Po drugie, w teorii Gödla zyskuje uzasadnienie także druga przesłanka argumentacji Kartezjańskiej – sam lemat Anzelma. Aby uzupełnić dowód ontologiczny, Gödel przyjmuje aksjomaty charakteryzujące kluczowe pierwotne pojęcie doskonałości (*perfekcji*), oraz definicję Boga jako *podmiotu wszystkich perfekcji* i *kwalifikacji koniecznego istnienia*. W strukturę dowodów *LA* i *LL* są także istotnie uwikłane modalności $\Box$ i $\Diamond$, jednak nie w związku z charakterystycznymi prawami *S5* lub *B*, i ten fakt stwarza okazję do podjęcia próby konstrukcji modalnie słabszej wersji formalizmu Gödla.

---

[6] Odniesienia źródłowe i komentarz J. Perzanowskiego znaleźć można w: Leibniz 1994: 67–76.

2. Wersja *S4* formalizacji Gödla – teoria TG_{S4}

Prezentowaną teorię wyrazimy w języku, do którego słownika należą: (i) zmienne indywiduowe (*IV*): $x, y, z, \ldots$; (ii) zmienne predykatowe pierwszego rzędu (*PV*): $\varphi, \psi, \ldots$; (iii) stałe pierwszego rzędu: *G*, *E* czytanie odpowiednio: … *jest Bogiem*, … *koniecznie istnieje*; (iv) stała predykatowa drugiego rzędu *P* – *własność … jest pozytywna*; (v) *symbole logiczne*: $^{-}$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$ (identyczność pierwszego rzędu), $\Box$, $\Diamond$ i (vi) nawiasy.

Termy predykatowe (*PT*) i formuły (*FOR*) są zdefiniowane indukcyjnie:
(i) $G, E \in PT$, $PV \subset PT$
(ii) jeżeli $\tau \in PT$, to $\overline{\tau} \in PT$
(iii) jeżeli $x \in IV, \tau \in PT$, to $\tau x \in FOR$[7]
(iv) jeżeli $x, y \in IV$, to $x = y \in FOR$
(v) jeżeli $\tau \in PT$, to $P(\tau) \in FOR$
(vi) jeżeli $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in FOR$, $x \in IV$, $\varphi \in PV$, to:
$\neg\mathrm{A}, (\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}), (\mathrm{A}\vee\mathrm{B}), (\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}), (\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}), \forall_x \mathrm{A}, \exists_x\mathrm{A}, \forall_\varphi \mathrm{A}, \exists_\varphi \mathrm{A}, \Box\mathrm{A}, \Diamond\mathrm{A} \in FOR$

Do *PT* i *FOR* należą wyłącznie wyrażenia opisane przez powyższe warunki.

Zbiór wolnych zmiennych indywiduowych w formule A oznaczymy: *FIV*(A), zbiór wolnych zmiennych predykatowych w A: *FPV*(A).

Logika, na której oprzemy teorię TG_{S4}, jest wyznaczona przez:
- tautologie klasycznej logiki zdaniowej
- aksjomaty logiki predykatów pierwszego i drugiego rzędu o następujących postaciach:
  (APred1) $\forall_x \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}^x_y$
  (APred2) $\forall_\varphi \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}^\varphi_\tau$

Wyrażenie A^x_y (odpowiednio: A^φ_τ) powstaje z A przez wstawienie w miejsce wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x (odpowiednio: φ) zmiennej y (odpowiednio: termu τ).

(∃/∀1) $\exists_x \mathrm{A} \leftrightarrow \neg\forall_x \neg\mathrm{A}$
(∃/∀2) $\exists_\varphi \mathrm{A} \leftrightarrow \neg\forall_\varphi \neg\mathrm{A}$

- aksjomaty dla identyczności pierwszego rzędu:
  (Aid1) $x = x$
  (Aid2) $x = y \wedge \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}\,[x/y]$

---

[7] Kontekst decyduje o przedmiotowym lub metajęzykowym użyciu niektórych zmiennych.

(Formuła A [x/y] powstaje z A w wyniku zastąpienia niektórych wolnych egzemplarzy zmiennej x zmienną y).

- aksjomaty zdaniowej logiki modalnej *S4*:
  (K) $\Box$ (A $\to$ B) $\to$ ($\Box$ A $\to$ $\Box$ B)
  (T) $\Box$ A $\to$ A
  (4) $\Box$ A $\to$ $\Box\Box$ A
  ($\Diamond\backslash\Box$) $\Diamond$ A $\leftrightarrow$ $\neg\Box\neg$A
- oraz pierwotne reguły wnioskowania:
  (MP) A, A $\to$ B = B
  (RPred1) A $\to$ B = A $\to$ $\forall_x$ B, gdzie $x \notin FIV$(A)
  (RPred2) A $\to$ B = A $\to$ $\forall_\varphi$ B, gdzie $\varphi \notin FPV$(A)
  (Nec) A = $\Box$ A

Do zbioru tez teorii TG_{S4} zaliczymy ponadto:
- podstawienia schematu definicyjnego:
  (C1) $\overline{\tau}\, x \leftrightarrow \neg\, \tau x$
  (*x posiada dopełnienie własności τ wtw, gdy x nie posiada τ*)
  (C2) $Gx \leftrightarrow \forall_\varphi(P(\varphi) \to \varphi x)$
  (*Bóg jest podmiotem wszystkich własności pozytywnych*)
  (C3) $Ex \leftrightarrow \forall_\varphi\, (\varphi Ess.\, x \to \Box\, \exists_x\, \varphi x)$
  ($\varphi Ess.\, x$ czytamy: *własność φ jest istotą x-a*)
  (*x koniecznie istnieje wtw, gdy każda jego istotna własność z konieczności przysługuje czemuś*)

Wyrażenie $\tau Ess.\, x$ jest metajęzykowym skrótem dla formuły:

$$\tau x \wedge \forall_\psi(\psi x \to \Box\, \forall_x(\tau x \to \psi x))$$

- aksjomaty specyficzne:
  (A1) $P(\overline{\tau}) \leftrightarrow \neg\, P(\tau)$
  (*Dowolna własność albo jej dopełnienie są pozytywne*)
  (A2) $P(\varphi) \to \Box\, P(\varphi)$
  (*Bycie własnością pozytywną jest konieczne*)
  (A3) $P(E)$
  (*Konieczne istnienie jest pozytywne*)
  (A4) $\Box\, (P(\varphi) \wedge \Box\, \forall_x(\varphi x \to \psi x) \to P(\psi))$
  (*Konieczne jest, by każda własność, którą z konieczności pociąga dowolna własność pozytywna, była także pozytywna*)
  (A5) $P(G)$
  (*Własność bycia Bogiem jest pozytywna*)
  (A6) $\Diamond\Box\exists_x Gx \to \Box\exists_x Gx$
  (*Jeżeli możliwe jest to, że koniecznie istnieje Bóg, to Bóg istnieje z konieczności*)

W komentarzu do naszej formalizacji zwróćmy uwagę na następujące punkty.

1. Przyjmujemy słabszą wersję charakterystyki predykatu identyczności. Gödel używa w swojej notatce symbolu $=$ w kontekście ze zmiennymi indywiduowymi, ale nie wskazuje na preferowane (słabe lub mocne) jego znaczenie (niektóre konsekwencje przyjęcia każdego z nich w wersji Scotta opisałam w: Świętorzecka 2012).
2. Zakładaną logikę osłabiamy także przez to, że nie bierzemy pod uwagę wszystkich podstawień schematu definicyjnego, ale tylko te, które wprowadzają: $\overline{\tau}$, G i E. W naszej słabej wersji nie potrzebujemy operatora λ i wykluczamy możliwość uzyskania ewentualnego „krachu modalności" – na gruncie naszej teorii nie jest tezą każde podstawienie implikacji $A \to \Box A$ (Kwestia możliwych sposobów otrzymania takiego efektu w różnych uzupełnieniach notatki Gödla jest szeroko dyskutowana za sprawą H. Sobela z 1987 roku. W argumentacji Sobela kluczowe jest zastosowanie operatora λ do formuł domkniętych przy jednoczesnym braku ograniczeń stosowalności reguły (Nec); por. Kovac 2003).
3. Charakterystyka modalności w ramach *S4* wymaga wzmocnienia oryginalnego aksjomatu:
   (A04) $P(\varphi) \wedge \Box\, \forall_x(\varphi x \to \psi x) \to P(\psi)$
   do jego koniecznościowego domknięcia (A4).
   Pozostałe aksjomaty specyficzne oryginalnej wersji formalizmu są równoważne swoim koniecznościowym domknięciom już na gruncie *S4*.

Niech $=^*$ oznacza inferencję bez (Nec). Odnotujmy, że:

Fakt 1. Dla każdego aksjomatu specyficznego (Ai):

$$TG_{S4} =^* (Ai) \to \Box\, (Ai).$$

Dowód:
Dla (Ai) =: (A1) mamy: $(P(\overline{\tau}) \leftrightarrow \neg\, P(\tau)) \leftrightarrow \Box\, (P(\overline{\tau}) \to \neg\, P(\tau))$
Niech A =: $P(\overline{\tau})$ oraz B =: $P(\varphi)$. Wówczas:

1. $A \leftrightarrow \neg B$ [(A1)]
2. $(\neg\Diamond B \wedge \Box A) \vee (\Box B \wedge \neg\Diamond A)$ [(A2), (T), ($\Diamond/\Box$), 1]
3. $\Box\, (\neg B \wedge A) \vee \Box(B \wedge \neg A)$ [(K), ($\Diamond/\Box$), 2]
4. $\Box\, (A \leftrightarrow \neg B)$ [(K), 3]

Dla (Ai) =: (A2) mamy: $(P(\varphi) \to \Box\, P(\varphi)) \to \Box(P(\varphi) \to \Box\, P(\varphi))$
Skorzystamy z tego, że:
(★) $\Diamond\ P(\varphi) \to P(\varphi)$

Niech A =: $P(\varphi)$. Mamy:

1. $A \rightarrow \Box A$ [(A2)]
2. $\Diamond A \rightarrow \Box A$ [★, 1]
3. $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$ [*S4*]
4. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ [*S4*]
5. $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Box\Box A$ [2, 3, 4]
6. $\Box\neg\Diamond A \vee \Box\Box A$ [(◊/□), 5]
7. $\Box(\neg\Diamond A \vee \Box A)$ [(K), 6]
8. $\Box(\Diamond A \rightarrow \Box A)$ [7]
9. $\Box(A \rightarrow \Box A)$ [★, (T), 8]

Dla (*Ai*) =: (A3) i (A5) implikacje postaci $(Ai) \rightarrow \Box(Ai)$ otrzymujemy na podstawie (A2).

Dla (*Ai*)=: (A6) użyjemy tautologicznego schematu *S4*:

(★★) $\Box A \vee \Box B \leftrightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$

Teraz niech A =: $\exists_x Gx$. Mamy:

1. $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$ [(A6)]
2. $\Box\neg\Box A \vee A$ [(K), 1]
3. $\Box(\Box\neg\Box A \vee \Box A)$ [★★, 2]
4. $\Box(\Diamond\Box A \rightarrow \Box A)$ [(K), 3]

W związku z Faktem 1 zwróćmy uwagę także na to, że wzmocnienie oryginalnej wersji (A04) do (A4) nie odgrywa roli w dowodzie głównej tezy *TG*. Do dowodu *LL* wystarczy (A04) (por. L1), a w dowodzie *LA* nie korzystamy ani z (A04), ani z (A4).

Uzupełnijmy teraz argumentację Gödla o dowody lematów *LL* i *LA*.
Lemat *LL* otrzymujemy z lematu:

L1. $P(\varphi) \rightarrow \Diamond\exists_x \varphi x$

Dowód:

1. $P(\varphi) \wedge \Box\forall_x(P(\varphi) \rightarrow \overline{\varphi}x) \rightarrow P(\overline{\varphi})$ [(A4)]
2. $P(\varphi) \wedge \Box\forall_x(P(\varphi) \rightarrow \neg\varphi x)) \rightarrow \neg P(\varphi)$ [(A1), 2, (C1)]
3. $P(\varphi) \rightarrow \Diamond\exists_x Gx$ [(◊/□), (∃/∀1), 2]

Na podstawie (L1) mamy: $P(G) \rightarrow \Diamond\exists_x Gx$. Stosujemy (A5) i otrzymujemy *LL*.
W dowodzie *LA* korzystamy z:

L2. $Gx \rightarrow GEss.\, x$

Dowód:

1. $Gx \to \forall_\psi(P(\psi) \to \psi x)$	[(C2)]
2. $P(\psi) \to \forall_x(Gx \to \psi x)$	[1]
3. $\Box P(\psi) \to \Box\forall_x(Gx \to \psi x)$	[(Nec), 2]
4. $P(\psi) \to \Box\forall_x(Gx \to \psi x)$	[(A2), 3]
5. $Gx \to (P(\overline{\psi}) \to \overline{\psi}x)$	[1]
6. $Gx \to (\psi x \to P(\psi))$	[5, (A1), (C1)]
7. $Gx \to Gx \wedge \forall_\psi(\psi x \to \Box\forall_x(Gx \to \psi x))$	[4, 6]
8. $Gx \to GEss.\,x$	[7]

L3. $GEssx \to (Ex \to \Box\exists_x Gx)$ [z (C3)]

L4. $Gx \to Ex$ [(C2), (A3)]

Najpierw dowodzimy:

(*LA'*) $\exists_x Gx \to \Box\exists_x Gx$

Dowód:

1. $Gx \to (Ex \to \Box\exists_x Gx)$	[L2, L3]
2. $Gx \to \Box\exists_x Gx$	[1, L4]
3. $\exists_x Gx \to \Box\exists_x Gx$	[2]

i wobec Faktu 1 mamy:

(*LA*) $\Box(\exists_x Gx \to \Box\exists_x Gx)$[8]

Na koniec podajmy jeszcze dowód głównej tezy *TG*, w którym korzystamy z (A6):

TG. $\Box\exists_x Gx$

Dowód:

1. $\Diamond\exists_x Gx$	[*LL*]
2. $\Box(\exists_x Gx \to \Box\exists_x Gx)$	[*LA*]
3. $\Diamond\exists_x Gx \to \Diamond\Box\exists_x Gx)$	[2, (K), ($\Diamond$ / $\Box$)]
4. $\Diamond\exists_x Gx \to \Box\exists_x Gx)$	[3, A6 (!)]
5. $\Box\exists_x Gx$	[1, 4]

[8] Por. komentarz do Faktu 1.

3. Interpretacja TG_{S4} w semantyce światów możliwych ze zmiennymi dziedzinami

W interpretacji naszej teorii skorzystamy z konstrukcji zaproponowanej przez Kovača (2003). Modyfikujemy w niej pojęcie modalnego ultrafiltru i zmieniamy pojęcie modelu. Całość upraszczamy i formułujemy języku w teorii zbiorów.

Przyjmijmy, że ramą jest uporządkowana szóstka $K = \langle W, D, \boldsymbol{Prop}, Q, R, \mathcal{F} \rangle$, gdzie:

(1r) W, D są niepustymi i rozłącznymi zbiorami odpowiednio *światów możliwych* i *indywiduów*, tj. $W, D \neq \varnothing$, $W \cap D = \varnothing$
(2r) $\boldsymbol{Prop} \subseteq (2^D)^W$ jest zbiorem funkcji takich, że każda z nich przyporządkowuje każdemu światu możliwemu $w \in W$ podzbiór zbioru D
(3r) Q: $W \rightarrow 2^D$ jest funkcją, która każdemu światu możliwemu $w \in W$ przyporządkowuje podzbiór zbioru D, przy czym: $\forall_w\ Q(w) \neq \varnothing$
(4r) $R \subseteq W \times W$ jest relacją *dostępności światów możliwych*
(5r) $\mathcal{F}$ jest *modalnym ultrafiltrem nad zbiorem D*

Modalnym ultrafiltrem $\mathcal{F}$ nad zbiorem D jest funkcja, która każdemu światu możliwemu $w \in W$ przyporządkowuje zbiór funkcji w taki sposób, że:

(1u) Niech $\rho(w) = D$ dla każdego $w \in W$.
Wówczas: $\forall_{w \in W}\, \rho \in \mathcal{F}(w)$

(2u) Niech N będzie skończonym lub nieskończonym zbiorem indeksów. Mamy:
$[\forall_{i \in N}\ \alpha_i \in \mathcal{F}(w)$ oraz $\forall_{w'}\ \beta(w') = \bigcap_{i \in N} \alpha_i(w')] \Rightarrow \beta \in \mathcal{F}(w)$

(3u) $\alpha_i \in \mathcal{F}(w)$ oraz $\forall_{w'}\ (wRw' \Rightarrow \alpha_i(w') \subseteq \alpha_j(w')) \Rightarrow \alpha_j \in \mathcal{F}(w)$

(4u) Niech $\overline{\alpha}(w) = D \backslash \alpha(w)$ dla każdego $w \in W$.
Wówczas: $\alpha \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overline{\alpha} \notin \mathcal{F}$

(6r) Niech N będzie zbiorem indeksów oraz $\forall_{i \in N}\ \alpha_i \in \mathcal{F}(w)$.
Wówczas: jeżeli $\beta(w) = \bigcap_{i \in N} \alpha_i(w)$, to:
$\exists_{w'} \forall_{w''} (w'Rw'' \Rightarrow \beta(w') \neq \varnothing) \Rightarrow \forall_{w''} \beta(w'') \neq \varnothing$

(7r) $\alpha \in \mathcal{F}(w) \Rightarrow \forall_{w'}(wR\, w' \Rightarrow \alpha \in \mathcal{F}(w'))$

(8r) $\alpha, \gamma, \eta \in \boldsymbol{Prop}$. $ess_{w,\alpha} = \{d{:}\ d \in \alpha(w)$ oraz $\forall_\gamma(d \in \gamma(w) \Rightarrow \forall_{w'}(wRw' \Rightarrow \alpha(w') \subseteq \gamma(w'))\}$ oraz $\eta(w) = \{d{:}\ \forall_\alpha(d \in ess_{w,\alpha} \Rightarrow \forall_{w'}(wRw' \Rightarrow \exists_{d' \in Q(w')}\ d' \in \alpha(w'))\}$.
Wówczas: $\forall_w\ \eta \in \mathcal{F}(w)$.

Skomentujmy wprowadzone pojęcia.

1. Funkcja Q przyporządkowuje światom możliwym możliwie różne uniwersa indywiduów.
2. Elementy zbioru ***Prop*** są ekstensjonalnymi odpowiednikami własności zrelatywizowanych do światów możliwych. Każdy z nich jest funkcją, która odnotowuje zmienność dowolnej własności w różnych światach możliwych. Zauważmy, że nie wprowadza się ograniczenia, zgodnie z którym wartością funkcji α należącej do ***Prop*** w dowolnym świecie w ma być zbiór indywiduów należących do jego dziedziny $Q(w)$ (w tym znaczeniu możemy także mówić w danym świecie możliwym o własnościach indywiduów, które nie są w nim aktualne).
3. Modalny ultrafiltr jest korelatem semantycznym ogółu własności pozytywnych.

Dla dowolnej ramy $K = <W, D, \boldsymbol{Prop}, Q, R, \mathcal{F}>$ określimy funkcję waluacji zmiennych v tak, że:

(1v) $v(x) \in D$ dla każdej zmiennej $x \in IV$

(2v) $v(\varphi) \in \boldsymbol{Prop}$ dla każdej zmiennej $\varphi \in PV$

Funkcję v rozszerzymy na termy $\overline{\tau}$ i G:

(3v) $\forall_w\ [v(\overline{\tau})](w) = D \setminus [v(\tau)](w)$

(4v) $\forall_w\ [v(G)](w) = \bigcap_{i \in N} \alpha_i(w)$, dla każdej funkcji $\alpha_i \in \mathcal{F}$

Gdy v i v' są dwiema waluacjami w $K = <W, D, \boldsymbol{Prop}, Q, R, \mathcal{F}>$ i mają wszystkie takie same wartości z możliwym wyjątkiem dla x, będziemy mówić, że v' jest x-wariantem waluacji v: $v =^x v'$. Podobnie dla waluacji v i v', z jedyną możliwą różnicą dla φ: $v =^\varphi v'$ (odp. v' jest φ-wariantem waluacji v).

Dla formuł niezawierających predykatu E indukcyjnie określimy pojęcie spełniania.

Wyrażenie: $(K, w) \vDash^v$ A czytamy: *formuła A jest spełniona w świecie możliwym w ramie K przez wartościowanie v.*

Dla dowolnej ramy $K = <W, D, \boldsymbol{Prop}, Q, R, \mathcal{F}>$, $w \in W$ i wartościowania v mamy:

(1s) $(K, w) \vDash^v \tau x$ wtw, gdy $v(x) \in [v(\tau)](w)$

(2s) $(K, w) \vDash^v P\tau$ wtw, gdy $v(\tau) \in \mathcal{F}(w)$

(3s) $(K, w) \vDash^v x = y$ wtw, gdy $v(x) = v(y)$

(4s) $(K, w) \vDash^v \neg A$ wtw, gdy $(K, w) \nvDash^v A$

(5s) $(K, w) \vDash^v A \rightarrow B$ wtw, gdy $(K, w) \nvDash^v A$ lub $(K, w) \vDash^v B$

(Dla pozostałych spójników prawdziwościowych charakterystyka $\vDash$ jest standardowa).

(6s) $(K, w) \vDash^{v} \forall_x A$ wtw, gdy $(K, w) \vDash^{v'} A$ dla każdego v': $v =^{x} v'$ oraz $v'(x) \in Q(w)$

(7s) $(K, w) \vDash^{v} \forall_{\varphi} A$ wtw, gdy $(K, w) \vDash^{v'} A$ dla każdego v': $v =^{\varphi} v'$

(8s) $(K, w) \vDash^{v} \Box A$ wtw, gdy $\forall_{w'}(wRw' \Rightarrow (K, w') \vDash^{v} A)$

(Warunki dla formuł z $\exists$ i $\Diamond$ są standardowe).

Zauważmy, że w odróżnieniu od aktualistycznej interpretacji kwantyfikatorów wiążących zmienne indywiduowe, przyjmujemy possybilistyczną kwantyfikację własności.
Teraz możemy wyznaczyć także waluację termu E.

Niech v_d^x będzie dowolną waluacją zmiennych, dla której $v(x) = d$. Wówczas:

(5v) $\forall_{\mathrm{w}}\ [v(E)](w) = \{d \in D \colon (K, w') \vDash^{v_d^x} \forall_{\varphi}(\varphi Ess.x \to \Box\, \exists_x \varphi x)\}$

(Teraz możemy powtórzyć kroki (1s) – (8s)).

Pojęcie *modelu* zdefiniujemy tak, aby było możliwe używanie aktualistycznych kwantyfikatorów dla zmiennych pierwszego rzędu bez wprowadzania ograniczeń związanych z użyciem (APred1) (por. Cresswell 2001):

Niech $K = \langle W, D, \boldsymbol{Prop}, Q, R, \mathcal{F}\rangle$.

(K, v) jest modelem dla $A \in FOR$ wtw, gdy $(K, w) \vDash^{v} A$, dla każdego $w \in W$, gdzie $v(x) \in Q(w)$ dla każdego $x \in FIV(A)$.

Na podstawie wprowadzonych definicji odnotujmy, że:

Fakt 2. (K, v), w której R jest zwrotna i przechodnia w W, jest modelem teorii aksjomatów logicznych.

Dowód jest indukcyjny. Dla C1 – C3 bierzemy 3v, 4v, 5v oraz definicje z 4u, 2u i 8r.

Fakt 3. Para (K, v), w której R jest zwrotna i przechodnia w W, jest modelem aksjomatów specyficznych (A1) – (A6).

W dowodzie używamy: dla (A1) – 4u, dla (A2) – 7r, dla (A3) – 8r, dla (A4) – 3u, dla (A5) – 2u, dla (A6) – 6r.

Twierdzenie. Para (K, v), w której R jest zwrotna i przechodnia w W, jest modelem teorii TG_{S4}.

Zaproponowany formalizm ogranicza silną redukcję modalności *S5* do wybranego specyficznego kontekstu, ale też nie trywializuje logiki funktorów $\Box$ i $\Diamond$. Jak pokazaliśmy, teoria TG_{S4} posiada interpretację w aktualistycznej semantyce światów możliwych. Te własności czynią ją być może podatną na dalsze rozszerzenia, w których bierze się pod uwagę nie tylko perfekcje i realizujący je Absolut, ale i inne kwalifikacje różnych od Niego indywiduów. Zgodnie z intencją Leibniza, teoria Absolutu (teofilozofia), jako składowa racjonalistycznej metafizyki zachodniej, jest przecież właściwą częścią ontologii (Perzanowski 1994b).

Bibliografia

Cresswell M.J. (2001), *Modal Logic*, w: L. Gobble (ed.), *Philosophical Logic*, Oxford: Blackwell, s. 133–158.

Czermak J. (2002), *Abriss des ontologischen Argumentes*, w: *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit*, Part II. *Kompedium zum Werk*, red. B. Buldt, E. Köhler, M. Stöltzner, P. Weibel, C. Klein, W. Depauli-Schimanowich-Göttig, Wiedeń: ÖBV et HPT VerlagsgmbH and Co. KG, s. 309–324.

Fitting M. (2002), *Types, Tableaus, and Gödel's God*, Trends in Logic, Dordrecht: Kluwer A. Publ.

Hàjek P. (2002), *Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes (betreffend Gödels ontologischen Beweis)* w: *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit*, Part II. *Kompedium zum Werk*, red. B. Buldt, E. Köhler, M. Stöltzner, P. Weibel, C. Klein, W. Depauli-Schimanowich-Göttig, Wiedeń: ÖBV et HPT VerlagsgmbH and Co. KG, s. 325–336.

Hartshorne Ch. (1962), *The Logic of Perfection*, La Salle: Open Court, wyd. IV: 1991.

Kovč S. (2003), *Some weakened Gödelian ontological systems*, „Journal of Philosophical Logic” 32, s. 565–588.

Leibniz G.W. (1994), *Pisma z teologii mistycznej*, tłum. i red. Małgorzata Frankiewicz, Kraków: Znak.

Perzanowski J. (1994a), *O wskazanych przez Ch. Hartshorne'a modalnych krokach w dowodzie ontologicznym św. Anzelma*, w: A. Pietruszczak (red.), *Filozofia/Logika. Filozofia Logiczna 1994*, Toruń: Wydawnictwo UMK, s. 77–96.

Perzanowski J. (1994b), *Teofilozofia Leibniza*, w: G.W. Leibniz, *Pisma z teologii mistycznej*, tłum. i red. Małgorzata Frankiewicz, Kraków: Znak, s. 243–351.

Sobel J.H. (1987), *Gödel's Ontological Proof*, w: J.J. Thomson (ed.), *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwright*, London, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, s. 241–261.

Świętorzecka K. (2012), *Jedyność i tożsamość Absolutu w Kurta Gödla teorii summum bonum*, w: J. Golińska-Pilarek, A. Wójtowicz (red.), *Identyczność znaku czy znak identyczności? Wokół logiki niefregowskiej*, Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 177–188.
Woleński J. (2011), *Gaunilon dzisiaj*, w: S. Wszołek (red.), *Dowody ontologiczne. W 900. rocznicę śmierci św. Anzelma*, Kraków: Copernicus Center Press, s. 21–34.

Streszczenie

Prezentowane rozważania są efektem poszukiwania możliwie słabej podstawy formalnej dla modalnej wersji ontologicznego argumentu na konieczne istnienie Boga, naszkicowanego przez K. Gödla. Dotychczasowe modalne rekonstrukcje notatki Gödla *Ontologischer Beweis* (1970) najczęściej opierają argumentację Gödla na różnych kwantyfikatorowych rozszerzeniach logiki modalnej *S5* lub *B*. System *S5*, jako podstawa formalna zamierzona przez samego autora, umożliwia określoną konstrukcję argumentu ontologicznego, jednak z drugiej strony ten sposób rozumienia modalności może być uważany także za źródło słabości opartej na nim teorii Absolutu – redukcja modalności *S5* (i *B*) może dawać okazję do formułowania krytyki w stylu Gaunilona. Standardowe rozszerzenie *S5* lub *B* do logiki kwantyfikatorowej jest uwikłane w dalsze komplikacje: w odpowiednio rozbudowanej standardowej semantyce światów możliwych rozstrzyga się, że modele tych logik mają stałe uniwersum indywiduów. Tymczasem to rozstrzygnięcie nie ma związku z zasadniczym problemem rozważanym w formalizmie Gödla. W proponowanej wersji argumentu Gödla ograniczam redukcję modalności *S5* do wybranego specyficznego kontekstu dotyczącego istnienia Absolutu. Logiką, która pozwala zachować konstrukcję argumentacji Gödla, okazuje się system *S4*. Otrzymaną teorię wiążę z semantyką światów możliwych z możliwie zmiennymi uniwersami. Istnienie indywiduów wyrażam za pomocą kwantyfikatora $\exists$ interpretowanego aktualistycznie, bez użycia pierwotnego predykatu istnienia.

Formalization, Mechanization and Automation of Gödel's Proof of God's Existence*

Christoph Benzmüller[1] and Bruno Woltzenlogel Paleo[2]

[1] Dahlem Center for Intelligent Systems, Freie Universität Berlin, Germany
c.benzmueller@gmail.com
[2] Theory and Logic Group, Vienna University of Technology, Austria
bruno@logic.at

Attempts to prove the existence (or non-existence) of God by means of abstract ontological arguments are an old tradition in philosophy and theology. Gödel's proof [12,13] is a modern culmination of this tradition, following particularly the footsteps of Leibniz. Gödel defines God as a being who possesses all *positive* properties. He does not extensively discuss what positive properties are, but instead he states a few reasonable (but debatable) axioms that they should satisfy. Various slightly different versions of axioms and definitions have been considered by Gödel and by several philosophers who commented on his proof (cf. [19,2,11,1,10]).

Dana Scott's version of Gödel's proof [18] employs the following axioms (**A**), definitions (**D**), corollaries (**C**) and theorems (**T**), and it proceeds in the following order:[3]

A1 Either a property or its negation is positive, but not both: $\forall\phi[P(\neg\phi) \leftrightarrow \neg P(\phi)]$
A2 A property necessarily implied by a positive property is positive: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \wedge \Box\forall x[\phi(x) \to \psi(x)]) \to P(\psi)]$
T1 Positive properties are possibly exemplified: $\forall\varphi[P(\varphi) \to \Diamond\exists x\varphi(x)]$
D1 A *God-like* being possesses all positive properties: $G(x) \leftrightarrow \forall\phi[P(\phi) \to \phi(x)]$
A3 The property of being God-like is positive: $P(G)$
C Possibly, God exists: $\Diamond\exists x G(x)$
A4 Positive properties are necessarily positive: $\forall\phi[P(\phi) \to \Box\, P(\phi)]$
D2 An *essence* of an individual is a property possessed by it and necessarily implying any of its properties: $\phi\ ess.\ x \leftrightarrow \phi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \to \Box\forall y(\phi(y) \to \psi(y)))$
T2 Being God-like is an essence of any God-like being: $\forall x[G(x) \to G\ ess.\ x]$
D3 *Necessary existence* of an individual is the necessary exemplification of all its essences: $NE(x) \leftrightarrow \forall\phi[\phi\ ess.\ x \to \Box\exists y\phi(y)]$
A5 Necessary existence is a positive property: $P(NE)$
T3 Necessarily, God exists: $\Box\exists x G(x)$

Scott's version of Gödel's proof has now been analysed for the first-time with an unprecedent degree of detail and formality with the help of theorem provers; cf. [17]. The following has been done (and in this order):

- A detailed natural deduction proof.
- A formalization of the axioms, definitions and theorems in the TPTP THF syntax [20].
- Automatic verification of the consistency of the axioms and definitions with Nitpick [8].
- Automatic demonstration of the theorems with the provers LEO-II [5] and Satallax [9].
- A step-by-step formalization using the Coq proof assistant [6].
- A formalization using the Isabelle proof assistant [16], where the theorems (and some additional lemmata) have been automated with Sledgehammer [7] and Metis [15].

---

* This work has been supported by the German Research Foundation under grant BE2501/9-1.

[3] A1, A2, A5, D1, D3 are logically equivalent to, respectively, axioms 2, 5 and 4 and definitions 1 and 3 in Gödel's notes [12,13]. A3 was introduced by Scott [18] and could be derived from Gödel's axiom 1 and D1 in a logic with infinitary conjunction. A4 is a weaker form of Gödel's axiom 3. D2 has an extra conjunct $\phi(x)$ lacking in Gödel's definition 2; this is believed to have been an oversight by Gödel [14].

Gödel's proof is challenging to formalize and verify because it requires an expressive logical language with modal operators (*possibly* and *necessarily*) and with quantifiers for individuals and properties. Our computer-assisted formalizations rely on an embedding of the modal logic into classical higher-order logic with Henkin semantics [4,3]. The formalization is thus essentially done in classical higher-order logic where quantified modal logic is emulated.

In our ongoing computer-assisted study of Gödel's proof we have obtained the following results:

- The basic modal logic K is sufficient for proving T1, C and T2.
- Modal logic S5 is not needed for proving T3; the logic KB is sufficient.
- Without the first conjunct $\phi(x)$ in D2 the set of axioms and definitions would be inconsistent.
- For proving theorem T1, only the left to right direction of axiom A1 is needed. However, the backward direction of A1 is required for proving T2.

This work attests the maturity of contemporary interactive and automated deduction tools for classical higher-order logic and demonstrates the elegance and practical relevance of the embeddings-based approach. Most importantly, our work opens new perspectives for a computer-assisted theoretical philosophy. The critical discussion of the underlying concepts, definitions and axioms remains a human responsibility, but the computer can assist in building and checking rigorously correct logical arguments. In case of logico-philosophical disputes, the computer can check the disputing arguments and partially fulfill Leibniz' dictum: Calculemus — Let us calculate!

References

1. R.M. Adams. Introductory note to *1970. In *Kurt Gödel: Collected Works Vol. 3: Unpublished Essays and Letters*. Oxford University Press, 1995.
2. A.C. Anderson and M. Gettings. Gödel ontological proof revisited. In *Gödel'96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science, and Physics: Lecture Notes in Logic 6*. Springer, 1996.
3. C. Benzmüller and L.C. Paulson. Exploring properties of normal multimodal logics in simple type theory with LEO-II. In *Festschrift in Honor of Peter B. Andrews on His 70th Birthday*, pages 386–406. College Publications.
4. C. Benzmüller and L.C. Paulson. Quantified multimodal logics in simple type theory. *Logica Universalis (Special Issue on Multimodal Logics)*, 7(1):7–20, 2013.
5. C. Benzmüller, F. Theiss, L. Paulson, and A. Fietzke. LEO-II - a cooperative automatic theorem prover for higher-order logic. In *Proc. of IJCAR 2008*, volume 5195 of *LNAI*, pages 162–170. Springer, 2008.
6. Y. Bertot and P. Casteran. *Interactive Theorem Proving and Program Development*. Springer, 2004.
7. J.C. Blanchette, S. Böhme, and L.C. Paulson. Extending Sledgehammer with SMT solvers. *Journal of Automated Reasoning*, 51(1):109–128, 2013.
8. J.C. Blanchette and T. Nipkow. Nitpick: A counterexample generator for higher-order logic based on a relational model finder. In *Proc. of ITP 2010*, number 6172 in LNCS, pages 131–146. Springer, 2010.
9. C.E. Brown. Satallax: An automated higher-order prover. In *Proc. of IJCAR 2012*, number 7364 in LNAI, pages 111 – 117. Springer, 2012.
10. R. Corazzon. Contemporary bibligraphy on the ontological proof (`http://www.ontology.co/biblio/ontological-proof-contemporary-biblio.htm`).
11. M. Fitting. *Types, Tableaux and Gödel's God*. Kluver Academic Press, 2002.
12. K. Gödel. Ontological proof. In *Kurt Gödel: Collected Works Vol. 3: Unpublished Essays and Letters*. Oxford University Press, 1970.
13. K. Gödel. *Appendix A. Notes in Kurt Gödel's Hand*, pages 144–145. In [19], 2004.
14. A.P. Hazen. On gödel's ontological proof. *Australasian Journal of Philosophy*, 76:361–377, 1998.
15. J. Hurd. First-order proof tactics in higher-order logic theorem provers. In *Design and Application of Strategies/Tactics in Higher Order Logics, NASA Tech. Rep. NASA/CP-2003-212448*, 2003.
16. T. Nipkow, L.C. Paulson, and M. Wenzel. *Isabelle/HOL: A Proof Assistant for Higher-Order Logic*. Number 2283 in LNCS. Springer, 2002.
17. B. Woltzenlogel Paleo and C. Benzmüller. Formal theology repository (`https://github.com/FormalTheology/GoedelGod`).
18. D. Scott. *Appendix B. Notes in Dana Scott's Hand*, pages 145–146. In [19], 2004.
19. J.H. Sobel. *Logic and Theism: Arguments for and Against Beliefs in God*. Cambridge U. Press, 2004.
20. G. Sutcliffe and C. Benzmüller. Automated reasoning in higher-order logic using the TPTP THF infrastructure. *Journal of Formalized Reasoning*, 3(1):1–27, 2010.